



CONCURSUL DOLEAN DE MATEMATICĂ
19 martie 2016

Clasa a X-a

1. a) Să se rezolve ecuația $x^{\log_{24} 14} + x \cdot 2^{\log_{24} x} = x^{\log_{24} 50}$.

b) Se consideră numerele reale, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, cu proprietatea că: $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$. Să se demonstreze că:

$$\frac{\log_{a_1} a_2}{\log_{a_2} a_1} + \frac{\log_{a_2} a_3}{\log_{a_3} a_2} + \dots + \frac{\log_{a_n} a_1}{\log_{a_1} a_n} \geq 1.$$

2. a) Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ astfel încât $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ și $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$.
Arătați că: $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + |z - z_3|^2 = 3(1 + |z|^2)$, $(A) z \in \mathbb{C}$.
b) Deduceți că dacă $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ este rădăcina cubică a unității, atunci pentru orice număr complex z , are loc egalitatea:

$$|z - 1|^2 + |z - \varepsilon|^2 + |z - \varepsilon^2|^2 = 3(1 + |z|^2).$$

3. a) Arătați că funcția $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\lg x}{x}$, este strict crescătoare.
b) Determinați $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ cu proprietatea: $(\sin x)^{\cos x} = (\cos x)^{\sin x}$.

4. Dacă $x, y \in (1, \infty)$ și $\log_x(x - 1) + \log_y(y - 1) \geq 0$, arătați că $x + y \geq 4$.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte;
- Timp de lucru: 3 ore.